

# Neprekidna slučajna promjenljiva

**Neprekidna slučajna promjenljiva** je slučajna promjenljiva koja može da uzme bilo koju vrijednost iz nekog intervala brojeva.

Vjerovatnoće pridružene neprekidnoj slučajnoj promjenljivoj  $X$  se određuju **funkcijom gustine vjerovatnoće** slučajne promjenljive. Funkcija, u oznaci  $f(x)$ , ima sledeće osobine.

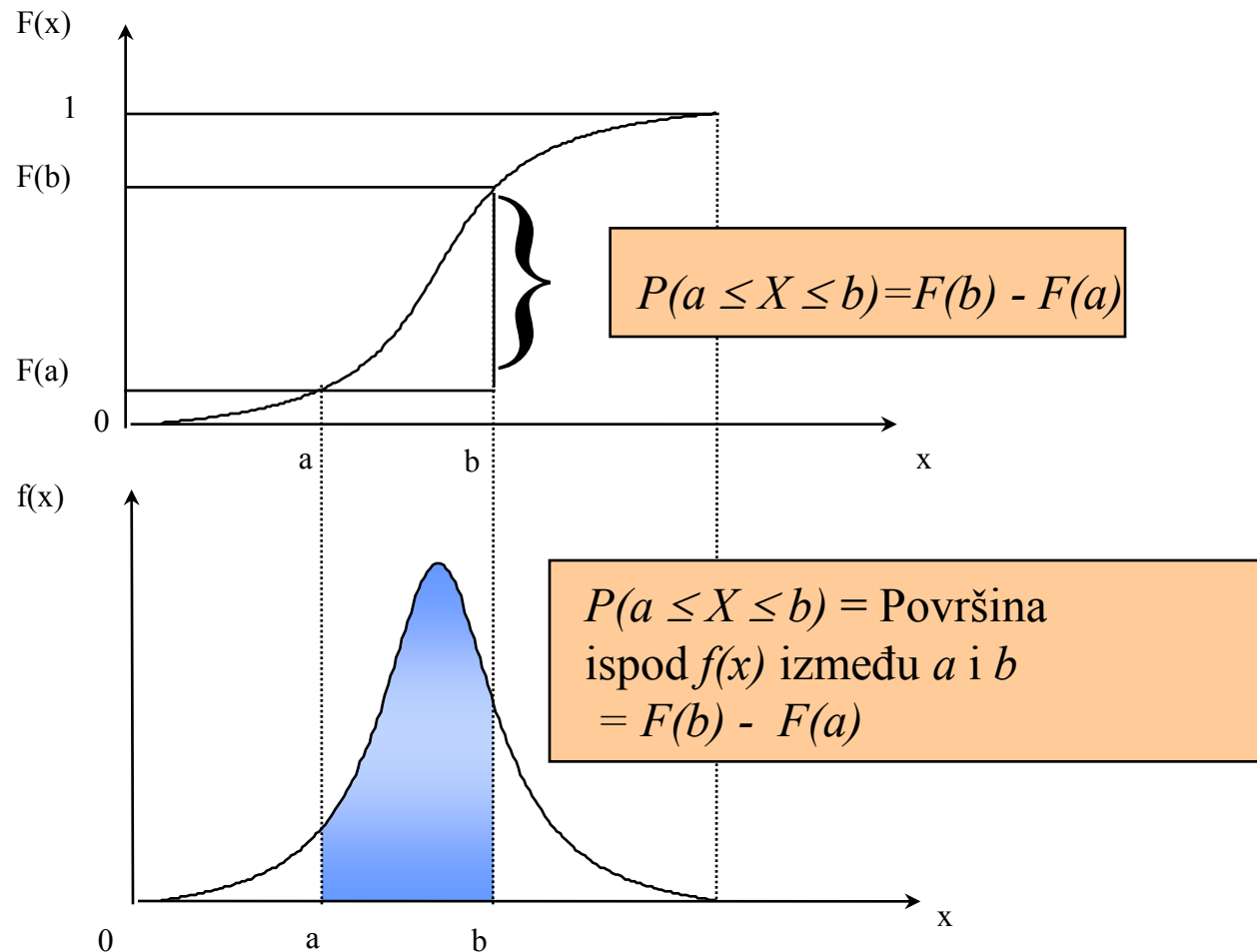
1.  $f(x) \geq 0$  za svako  $x$ .
2. Vjerovatnoća da će  $X$  biti između dva broja  $a$  i  $b$  je jednaka površini ispod  $f(x)$  između  $a$  i  $b$ .
3. Ukupna površina ispod krive  $f(x)$  je jednaka 1.00.

---

**Funkcija kumulativne raspodjele** neprekidne slučajne promjenljive:

$F(x) = P(X \leq x)$  = Površini ispod  $f(x)$  između najmanje moguće vrijednosti  $X$  (često  $-\infty$ ) i tačke  $x$ .

# Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija kumulativne raspodjele

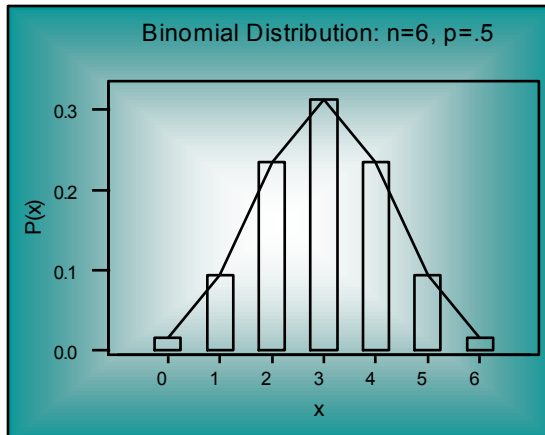


- Normalna raspodjela vjerovatnoće
- Standardna normalna raspodjela
- Transformisanje normalne slučajne promjenljive
- Inverzna transformacija
- Složeniji problemi
- Normalna raspodjela kao aproksimacija ostalih raspodjela vjerovatnoće
- Zaključci

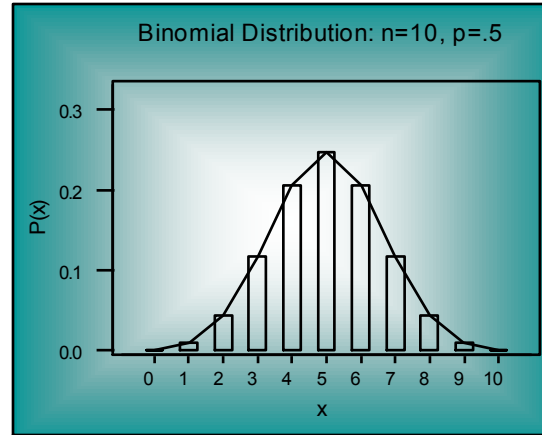
# 5-1 Uvod

Kako n raste, binomna raspodjela približava se ...

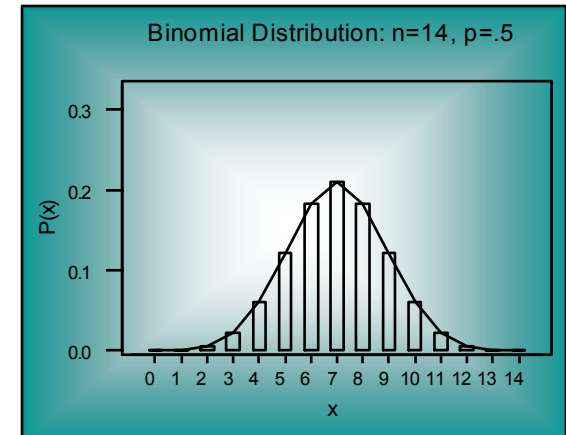
**n = 6**



**n = 10**



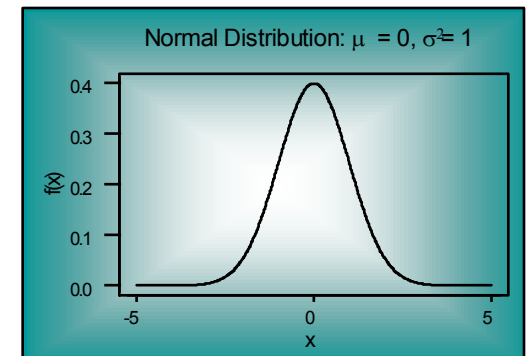
**n = 14**



Normalna funkcija gustine  
raspodjele:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{za} \quad -\infty < x < \infty$$

gdje  $e=2.7182818\dots$  i  $\pi=3.14159265\dots$



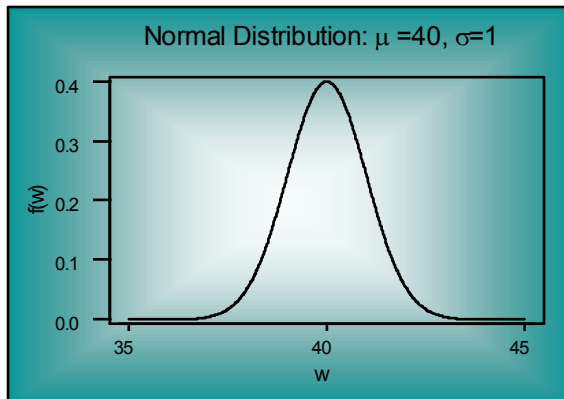
# Normalna raspodjela vjerovatnoće

- **Osobine:**

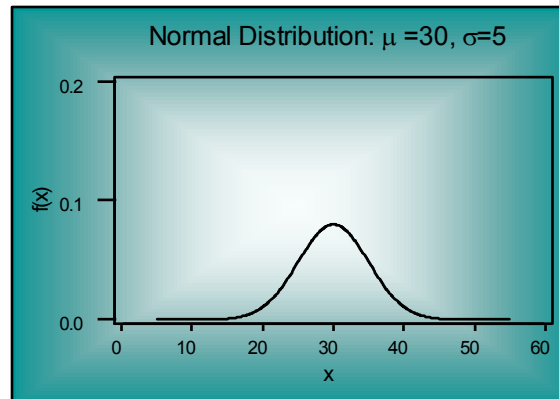
- **U obliku zvona** je i **simetrična** raspodjela. Pošto je raspodjela simetrična, jedna polovina (.50 ili 50%) leži sa svake strane prosjeka.
- Karakteristični parametri su **prosjek**,  $\mu$ , i **varijansa**,  $\sigma^2$ . Tj:  $[X \sim N(\mu, \sigma^2)]$ .
- Svako je **asimptota** horizontalna osa.
- Površina ispod bilo koje funkcije gustine normalne vjerovatnoće unutar  $k\sigma$  od  $\mu$  **je ista** za sve normalne raspodjele, bez obzira na prosjek i varijansu.

# Normalne raspodjele vjerovatnoće

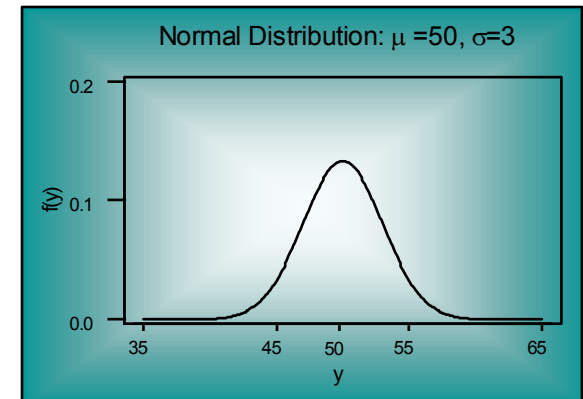
Sve su funkcije gustine normalnih rasporeda iako svaka ima različit prosjek i varijansu.



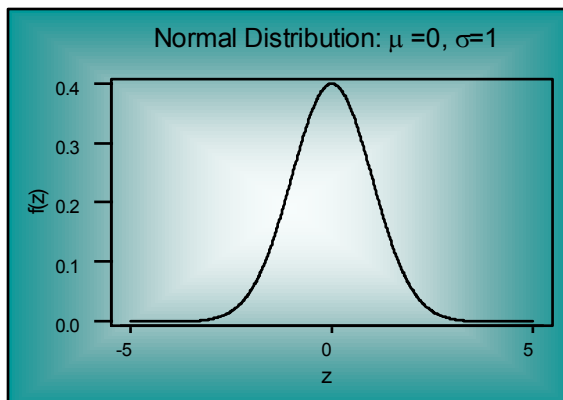
$$W \sim N(40, 1)$$



$$X \sim N(30, 25)$$



$$Y \sim N(50, 9)$$



$$Z \sim N(0, 1)$$

**Odrediti:**

$$P(39 \leq W \leq 41)$$

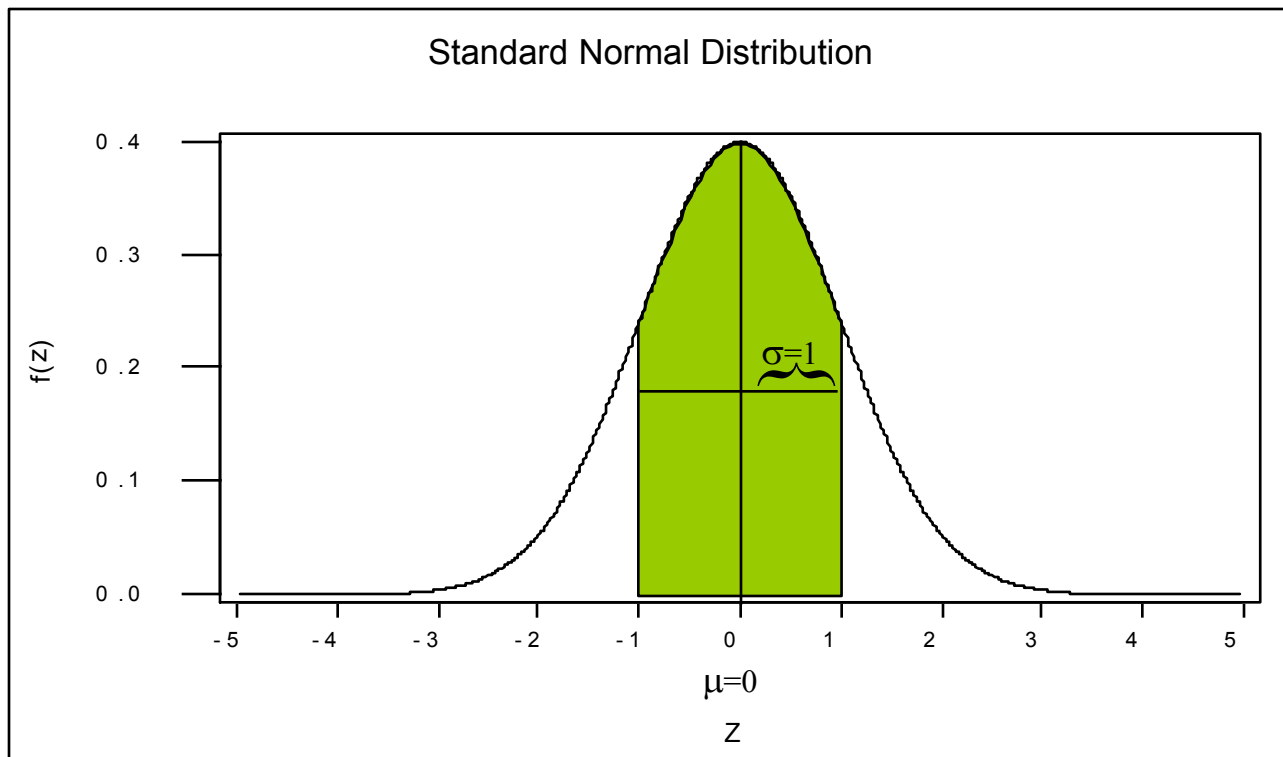
$$P(25 \leq X \leq 35)$$

$$P(47 \leq Y \leq 53)$$

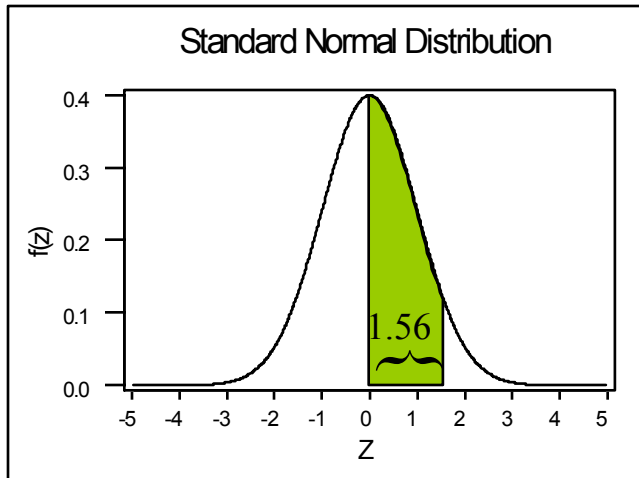
$$P(-1 \leq Z \leq 1)$$

# 5-2 Standardna normalna raspodjela

**Standardna normalna sl. promjenljiva,  $Z$ , je normalna sl. prom. sa prosjekom  $\mu = 0$  i stand. devijacijom  $\sigma = 1$ :  $Z \sim N(0, 1^2)$ .**



# Nalaženje vjerovatnoće standardne normalne raspodjele: $P(0 < Z < 1.56)$



## Standardne normalne vjerovatnoće

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Tražiti u redu  
označenom **1.5** i koloni  
označenoj **.06** da se  
nađe  
 $P(0 \leq z \leq 1.56)$   
 $=F(1.56)-F(0)=.9406-.5$   
 $= .4406$



# Nalaženje vjerovatnoće standardne normalne raspodjele: $P(Z < -2.47)$

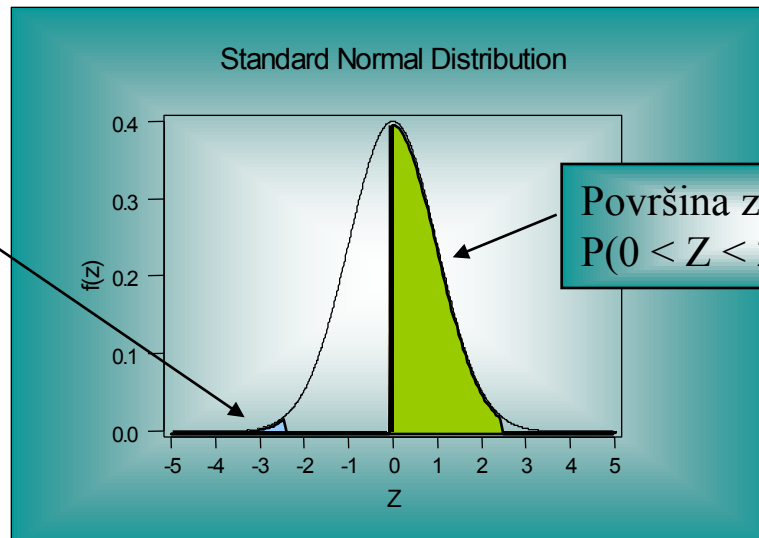
Naći  $P(Z < -2.47)$ :

Naći u tabeli -2.47

$$P(Z < -2.47) = .0068$$

z ...		.06	.07	.08
.		.	.	.
.		.	.	.
.		.	.	.
-2.3 ...	0.0054	0.0052	0.0051	
-2.4 ...	0.0071	0.0069	<b>0.0068</b>	
-2.5 ...	0.0094	0.0091	0.0089	
.				
.				
.				

Površina ulijevo od -2.47  
 $P(Z < -2.47) = 0.0068$



Površina za 2.47  
 $P(0 < Z < 2.47) = 0.4932$

# Nalaženje vjerovatnoće standardne normalne raspodjele: $P(1 < Z < 2)$

Naći  $P(1 \leq Z \leq 2)$ :

1. Naći u tabeli 2.00

$$F(2) = P(Z \leq 2.00) = .9772$$

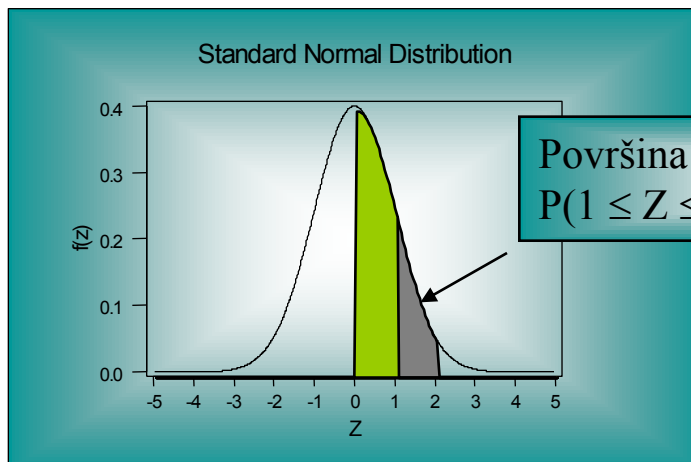
2. Naći u tabeli 1.00

$$F(1) = P(Z \leq 1.00) = .8413$$

3.  $P(1 \leq Z \leq 2.00) = P(Z \leq 2.00) - P(Z \leq 1.00)$

$$= .9772 - .8413 = .1359$$

z	.00	...
.	.	...
.	.	...
0.9	0.8159	...
1.0	0.8413	...
1.1	0.8643	...
.	.	...
.	.	...
1.9	0.9713	...
2.0	0.9772	...
2.1	0.9821	...
.	.	...
.	.	...



Površina između 1 i 2

$$P(1 \leq Z \leq 2) = .9772 - .8413 = 0.1359$$

# Nalaženje vrijednosti standardne normalne sl. prom.: $P(Z < z) = 0.90$

Naći  $z$  tako da je

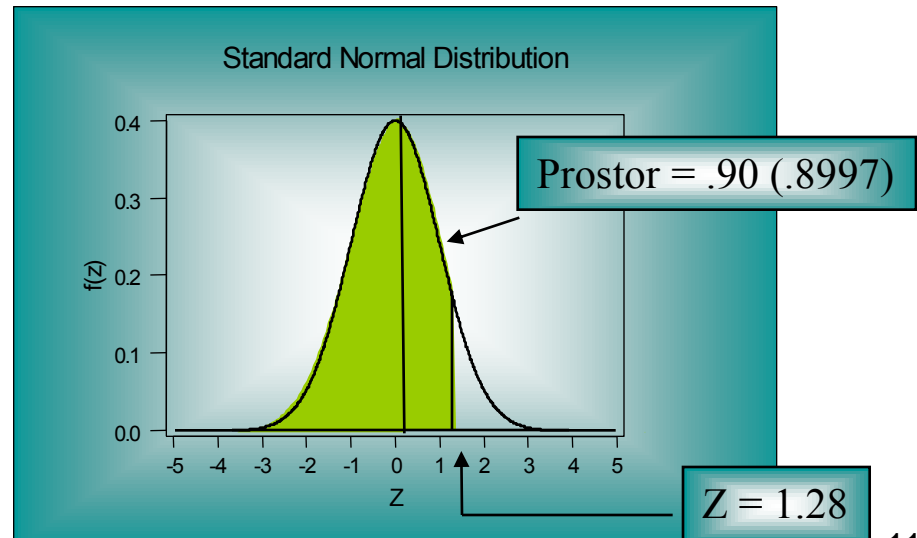
$$P(Z \leq z) = .90:$$

1. Naći vjerovatnoću što bližu .90 u tabeli standardnih normalnih vjerovatnoća.

2. Onda odrediti vrijednost  $z$  iz odgovarajućeg reda i kolone.

$$P(Z \leq 1.28) \approx .90$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177



# 99% Interval oko prosjeka:

$$P(-z < Z < z) = 0.99$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = F(z) - F(-z) = F(z) - (1 - F(z)) = F(z) - 1 + F(z) = 2F(z) - 1 = 0.99$$
$$F(z) = 1.99/2 = 0.995$$

Pronaći u tabeli stand. normalne raspodjele taj broj i naći z vrijednost koja mu odgovara:

$$2.57 \leq z_{.005} \leq 2.58$$
$$z_{.005} \approx 2.575$$

$$P(-2.575 \leq Z \leq 2.575) = .99$$

z	.04	.05	.06	.07	.08	.09
2.4 ...	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5 ...	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6 ...	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964

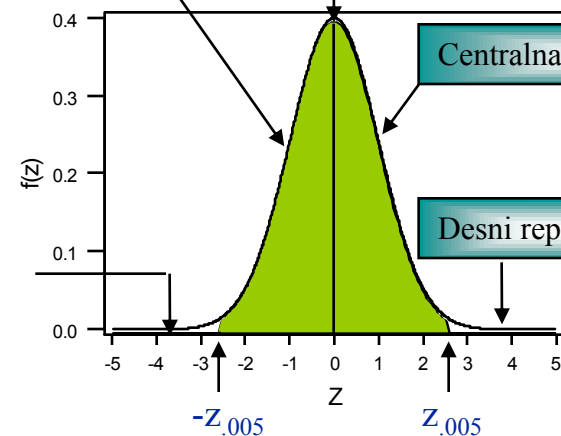
Centralna lijeva strana = .495

U centru = .99

Centralna desna strana = .495

Desni rep = .005

Lijevi rep = .005



-2.575

2.575

# 5-3 Transformacija normalne slučajne promjenljive

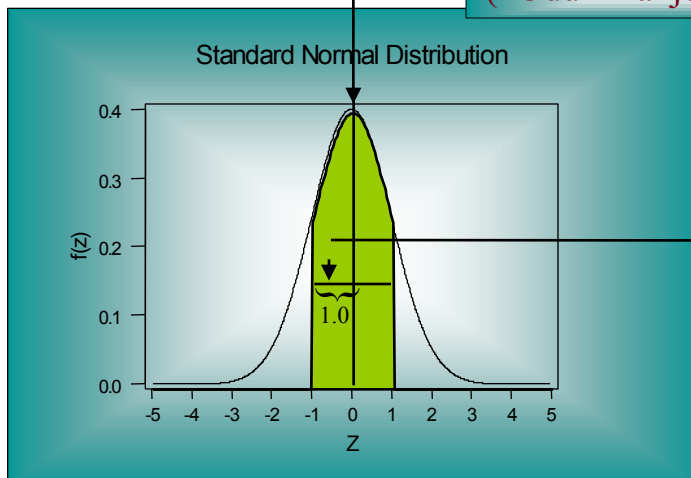
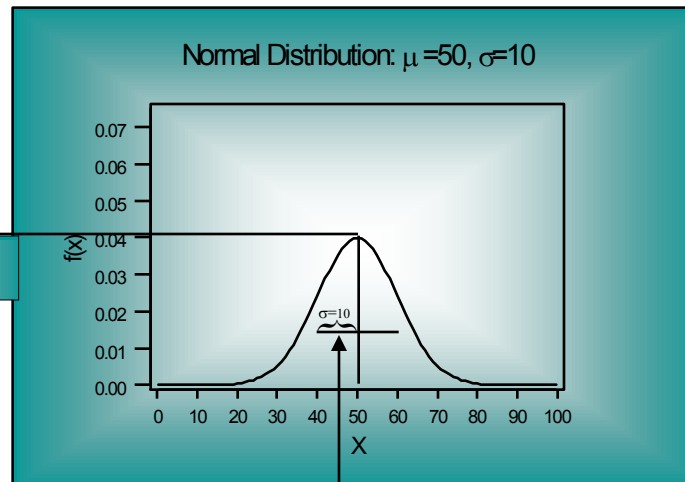
Odrediti  $P(40 \leq X \leq 60) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6826$  jer je  $\mu = 50$  i  $\sigma = 10$ .

Transformacija od  $X$  za  $Z$ :

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

Transformacija

(1) Oduzimanje:  $(X - \mu_x)$



(2) Dijeljenje sa  $\sigma_x$

Inverzna transformacija od  $Z$  za  $X$ :

$$X = \mu_x + Z \sigma_x$$

# Korišćenje normalne transformacije

**Pr. 5-1**

$X \sim N(160, 30^2)$

$$\begin{aligned} &P(100 \leq X \leq 180) \\ &= P\left(\frac{100 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{180 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{100 - 160}{30} \leq Z \leq \frac{180 - 160}{30}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq .6667) \\ &= 0.7454 - 0.0228 = 0.7226 \end{aligned}$$

**Pr. 5-2**

$X \sim N(127, 22^2)$

$$\begin{aligned} &P(X < 150) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{150 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{150 - 127}{22}\right) \\ &= P(Z < 1.045) \\ &= 0.8508 \end{aligned}$$

# Korišćenje normalne transformacije - primjer 5-3

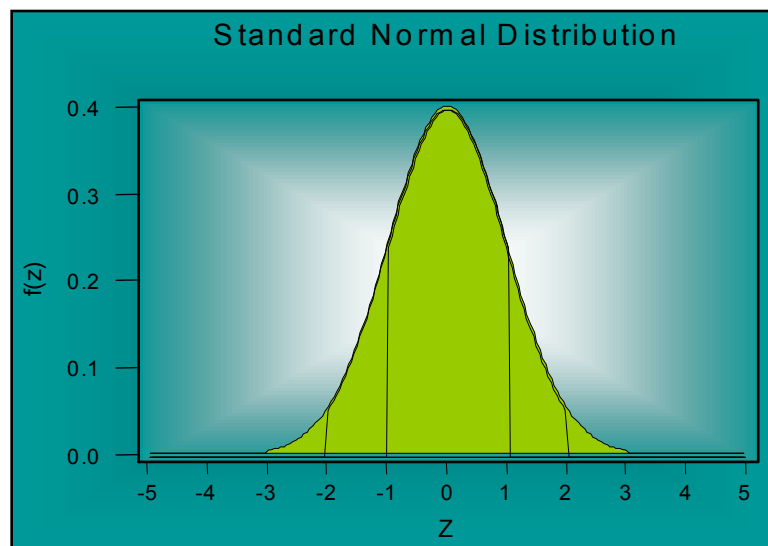
Pr 5-3

$X \sim N(383, 12^2)$

$$\begin{aligned} & P(394 \leq X \leq 399) \\ &= P\left(\frac{394 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{399 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{394 - 383}{12} \leq Z \leq \frac{399 - 383}{12}\right) \\ &= P(0.9166 \leq Z \leq 1.333) \\ &= 0.9082 - 0.8212 = 0.087 \end{aligned}$$

# Normalne vjerovatnoće

- Vjerovatnoća da je normalna sl. prom. između *1 standardne devijacije* od prosjeka (sa svake strane) je 0.6826, ili *približno 0.68*.
- Vjerovatnoća da je normalna sl. prom. između *2 standardne devijacije* od prosjeka je 0.9544, ili *približno 0.95*.
- Vjerovatnoća da je normalna sl. prom. između *3 standardne devijacije* od prosjeka je 0.9974.





# PRIMJER 5-4

- Dnevna potrošnja vode u Kotoru je normalno distribuirana sa sredinom od 20 litara i st. dev. od 5 litara.
- Oko 68% dnevne potrošnje vode leži unutar koje dvije vrijednosti?
- $\mu \pm 1\sigma = 20 \pm 1(5)$ . 68% svih dnevnih potrošnji vode će biti između 15 i 25 litara.

# PRIMJER 5-4 *nastavak*

- Koja je vjerovatnoća da će domaćinstvo na slučaj izabrano koristiti manje od 20 litara na dan?
- Odgovarajuća **Z vrijednost je**  $Z=(20-20)/5=0$ . Prema tome,  $P(X<20)=P(Z<0)=.5$
- Koji procenat domaćinstava ima potrošnju između 20 i 24 litra?
- **Z vrijednost za**  $X=20$  je  $Z=0$  a za  $X=24$ ,  $Z=(24-20)/5=.8$ . Prema tome,  $P(20<X<24)=P(0<Z<.8)=28.81\%$

# 5-4 Inverzna transformacija

Ako je  $X \sim N(50, 10^2)$ ,

$$P(X > 70) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma} > \frac{70 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{70 - 50}{10}\right) = P(Z > 2)$$

Tj.,  $P(X > 70)$  može se lako naći jer 70 je 2 standardne devijacije iznad prosjeka od  $X$ :  $70 = \mu + 2\sigma$ .  $P(X > 70)$  je jednako  $P(Z > 2)$ , površini ispod standardne normalne raspodjele.

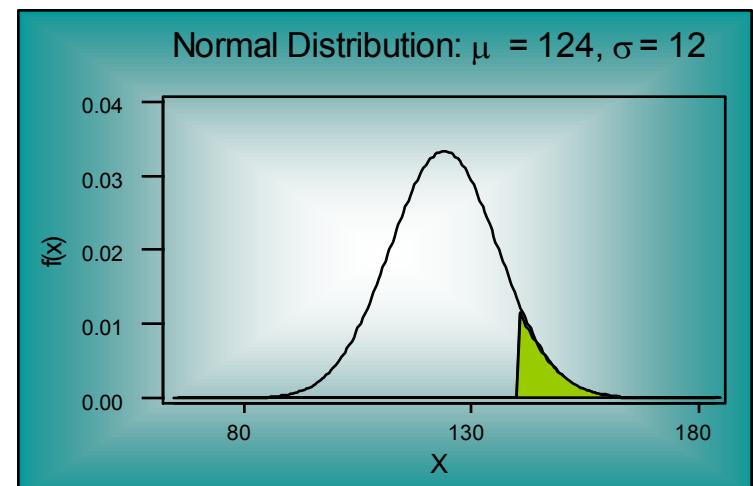
Primjer 5-5

$X \sim N(124, 12^2)$

$P(X > x) = 0.10$  i  $P(Z > 1.28) \approx 0.10$

$x = \mu + z\sigma = 124 + (1.28)(12) = 139.36$

z	.07	.08	.09
...	...	...	...
1.1	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9147	0.9162	0.9177
...	...	...	...



# Inverzna transformacija (2)

Primjer 5-6

$$X \sim N(2450, 400^2)$$

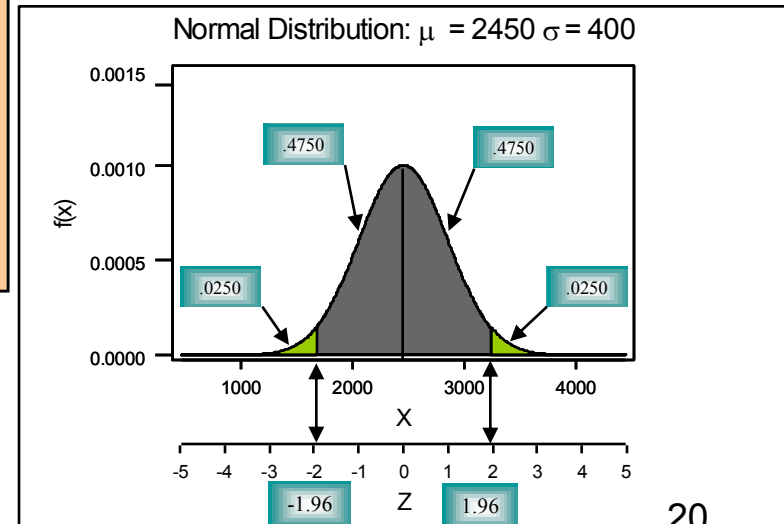
$$P(a < X < b) = 0.95 \text{ i}$$

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

$$x = \mu \pm z\sigma = 2450 \pm (1.96)(400) = 2450 \pm 784 = (1666, 3234)$$

$$P(1666 < X < 3234) = 0.95$$

z	.05	.06	.07
1.8	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9798	0.9803	0.9808



# Modus

1 Ako je poznata statistička serija sa ocjenama: A, C, C, B, D, E, A, A, modus je:

- 3
- Ne može se odrediti
- **A**
- Serija nema modus

2 Prema skupu podataka: 1 4 4 5 11 7 8 19 5 7, raspored je:

- **Multimodalan**
- Bimodalan
- Modus nije definisan
- Unimodalan

# 3. zadatak

Ocjena	A	B	C	D	E	$\Sigma$
Broj studenata	10	8	64	93	106	281

Ocjene iz Matematike na Ekonomskom fakultetu u Podgorici u 2010/2011. godini date su tabelom.

1) Modus je:

- 106
- **E**
- C
- 64

# Prosjek

Ocjena	A	B	C	D	E	$\Sigma$
Broj studenata	10	8	64	93	106	281

4) Prosječna ocjena je:

- Ne može se odrediti
- E
- C
- **7.014**

$$\mu = \frac{\sum fx}{N} = \frac{10 \cdot 10 + \dots + 106 \cdot 6}{281} = 7.014$$

# 5. Medijana

- A Dati su podaci o utrošku vremena prilikom obrade naloga jednog zaposlenog u banci na određeni dan: 17 11 22 11 5 7 4 8.
- Pola naloga je trajalo manje, a pola više od:\_\_\_\_\_.

4 5 7 8 11 11 17 22

$$Me = \frac{x_{\frac{8}{2}} + x_{\frac{8}{2}+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{8+11}{2} = 9.5$$



# 6. Varijansa i stand. devijacija

Date su zarade (u milijardama dolara) u uzorku od 5 najbogatijih ljudi svijeta, čija je suma 95,5, i  $\sum x^2 = 2854,93$ .

Varijansa je u milijardama:

- 183,59
- **257,72**
- 16,05
- 0,1605

$$s^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{2854,93 - 5 * 19,1^2}{5-1} = 257,72$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{\sum f} = \frac{95,5}{5} = 19,1$$

# 7. Vjerovatnoća i tabela kontigencije

	Da	Ne	Bez odgovora
Čovjek	77	140	32
Žena	104	119	34

Izabran je uzorak od 506 radnika i anketirani su po pitanju da li žele da dobiju još jednu nedjelju plaćenog odmora godišnje. Ako je jedna osoba izabrana slučajnim putem, koja je vjerovatnoća da je ispitanik:

- 1) dao potvrđan odgovor pod uslovom da je žena?
- 2) Ostao bez odgovora ili dao potvrđan odgovor?
- 3) žena koja je dala negativan odgovor?

# 7. Vjerovatnoća i tabela kontigencije

	Da	Ne	Bez odgovora
Čovjek	77	140	32
Žena	104	119	34

1) dao potvrđan odgovor pod uslovom da je žena?

104/257

# 7. Vjerovatnoća i tabela kontigencije

	Da	Ne	Bez odgovora
Čovjek	77	140	32
Žena	104	119	34

2) dao potvrđan odgovor ili ostao bez odgovora?  
 $181/506+66/506-0/506=247/506=48.8\%$

# 7. Vjerovatnoća i tabela kontigencije

	Da	Ne	Bez odgovora
Čovjek	77	140	32
Žena	104	119	34

3) žena koja je dala negativan odgovor? 119/506

# 8. Prosjek

Konačna ocjena iz Statistike izvodi se kao prosjek iz poena za domaći zadatak, dva kolokvijuma i završni ispit. Domaći zadatak čini 10%, a kolokvijumi po 25% konačne ocjene. Preostali dio ocjene čini završni ispit. Ako je student za domaći dobio 95%, 70% na prvom kolokvijumu, 96% na drugom kolokvijumu, a 72% na završnom, odrediti njegovu konačnu ocjenu.

# 8. Prosjek

	Učešće P	Ocjena X	XP
Domaći zadatak	10%=0,1	95%	9,5%
I kol.	25%=0,25	70%	17,5%
II kol.	25%=0,25	96%	24%
Završni ispit	40%=0,4	72%	28,8%
Suma	100%		79,8%

Konačna ocjena je ocjena C!

$$\bar{x} = \sum xp = 79,8\%$$